27/09/15 - Principio di induzione. Applicazione alla somma dei termini di progressioni geometriche e aritmetiche

Riguarda l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Indichiamo con P_n una proprietà dei numeri interi ≥ 0, cioè una frase con dentro un parametro n, che a seconda del valore di n può essere vera o falsa.

- Esempi: - $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (SEMPRE VERA)

$\uparrow$ $\rightarrow P(n)$

è una proposizione che contiene al suo interno un parametro n, a n posso sostituire un qualsiasi valore di $\mathbb{N}$ e il risultato del valore può essere vera o falsa

- $2^n \geq n + 5$

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare che una certa P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (per infiniti valori ma per SOSTITUZIONE)

Supponiamo che

(i) P_0 è vera (cioè P_n è vera quando metto $n=0$)

(ii) se per un certo $n \in \mathbb{N}$ si ha che P_n è vera, allora anche P_{n+1} è vera.

Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Di solito (i) si chiama PASSO BASE, (ii) si chiama PASSO INDUTTIVO (cioè il passaggio da un valore di n al successivo).

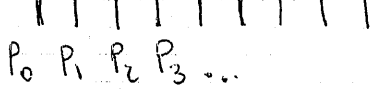
Brutalmente perché funziona? P_0 è vera per la (i), uso la (ii) con $n=0$ "se P_0 è vera, allora è vera P_1". P_0 so che è vera, quindi ho conquistato P_1.

Uso la (ii) con $n=1$. Essendo P_1 vera, sarà vera anche P_2.

Essendo P_2 vera, è vera anche P_3, e così via.

ACHTUNG! Quando dim. la (ii) ho come ipotesi (ciò che assumo essere vera, che posso usare) che P_n è vera e come tesi che P_{n+1} è vera.

Tessera del domino



Il passo base equivale a far cadere la tessera P_0. Il passo induttivo è il meccanismo di caduta, se cade una cade la successiva, (una tessera) vuol dire che sono messe vicine. NON ASSUMO CHE SIA CADUTA, MA SE CADE SI TRASCINA LA SUCCESSIVA.

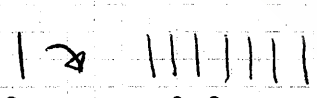
Variante: Supponiamo che
(i) P_{72} è vera
(ii) Se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera.

} da queste due informazioni non posso dedurre nulla sulle P_n con $0 \leq n \leq 71$.

Allora P_n è vera per ogni $n \geq 72$.

Variante 2: Supponiamo che
(i) P_0 è vera
(ii) Se $n \geq 1$ e P_n è vera, allora P_{n+1} è vera.

Allora non si può dire nulla perché il meccanismo di caduta funziona solo da 1 in poi.



In questo caso se voglio dimostrare che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ devo dimostrare un secondo passo base, e cioè che P_1 è vera.

Osservazione L'induzione permette di dimostrare rigorosamente una formula trovata in altro modo. Non dà strumento per scoprire l'uguaglianza da dimostrare.

o —— o —— o

ESEMPIO 1 $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $[\forall\, n \geq 1]$

[somma degli interi da 1 a n]

Passo base $[n=1]$ A sinistra viene 1. A destra viene $\frac{1\cdot 2}{2}=1$. OKAY.

↓ sommare gli interi da 1 a 1

Passo Induttivo $(n \Rightarrow n+1)$ Hp. $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

↓ è che P_n è vera cioè ↑ (non sto dicendo che è vera, sto facendo finta che sia vera)

2) Th. $1+2+3+\ldots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

↑ che P_{n+1} è vera — stessa cosa con $(n+1)$ al posto di n — $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Dim. P.I. Catena di uguaglianze (parto con ↑ e voglio arrivare con ↑ primo = ultimo)

$$1+2+3+\ldots+(n+1) \overset{\text{per}}{=} [1+2+\ldots+n] + (n+1)$$

voglio isolare ciò che già so! — so che ip. induttiva

$$\overset{\text{uso l'ipotesi induttiva}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\overset{\text{per}}{=} \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \overset{\text{per}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dunque il 1° termine della catena di uguaglianze è uguale all'ultimo, IL CHE È PROPRIO LA TESI DEL PASSO INDUTTIVO.

ESEMPIO 2 $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\forall\, n \geq 1$

Passo base: $[n=1]$ A sx viene 1. A dx viene $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$ [OK.]

Passo induttivo: $n \Rightarrow n+1$ Hp. $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

master COPY COPISTERIA

Th. $1^2+2^2+\dots+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ← stessa cosa di sopra con $n+1$ al posto di n

Dim P.I.

$$\left[1^2+2^2+\dots+n^2\right]+(n+1)^2 \overset{\text{uso Hp. induttiva}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$\overset{\text{Per}}{=} (n+1)\cdot\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} \overset{\text{Per}}{=} (n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6} \overset{\text{Per}}{=}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+6)}{6}$$

Esempio 3 $\quad 1+a+a^2+a^3+\dots+a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$ $\quad \forall n\geq 0$, $\forall a\neq 1$ ← dominio

($1=a^0$)

base fissa e esponenti sono gli interi

PASSO BASE: $\boxed{n=0}$ A sx viene 1. A dx viene $\frac{a-1}{a-1}=1$. OK

(Ho usato già che $a\neq 1$)

PASSO INDUTTIVO: $n \Rightarrow n+1$ Hp. $1+a+a^2\dots+a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Th. $1+a+a^2\dots+a^{n+1} = \dfrac{a^{n+2}-1}{a-1}$

Dim. P.I.: catena di uguaglianze

$$\left[1+a+a^2+\dots+a^n\right]+a^{n+1} \overset{\text{uso Hp. induttiva}}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1}+a^{n+1}$$

$$\overset{\text{Per}}{=} \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} \overset{\text{Per}}{=} \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$$

—o— o —

Oss. 1. Cosa succede nell'es. 3 se $a=1$?

$1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^n = n+1$ (sono $n+1$ termini tutti uguali ad 1)

Oss. 2. Come può venire in mente la Formula dell'esempio 1?

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

Sommando:

$$2S = (n+1)(n+1)(n+1) + \dots (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

(sono n termini tutti uguali a $(n+1)$)

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$ [Dividendo per 2 ho la formula per S.]

Nell'esempio 3 basta pensare alla Fattorizzazioni:

$a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$, $a^4 - 1 = (a-1)(a^3+a^2+a+1)$,

$a^{20} - 1 = (a-1)(a^{19} + a^{18} + \dots + 1)$

(dividendo la somma delle potenze)

$$a^{19} + a^{18} + \dots + 1 = \frac{a^{19+1} - 1}{a-1}$$

master COPY COPISTERIA 050/831126 338/9837745